FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Dada um número real a (a > 0 e a ≠ 1), denomina-se função exponencial de base a função f: R →R+* definida por **f(x) = a^x**.

OLHA A DICA!

As restrições a > 0 e a ≠ 1 dadas na definição são necessárias, pois:

- Para a = 0 e x negativo, não existiria a^x (Não teríamos uma função definida em IR);

Observe:

a) $0^2 = 0$

b) $0^{-2} = \dfrac{1}{0^2} = \dfrac{1}{0}$ (Não existe divisão por zero)

- Para a < 0 e x = $\frac{1}{2}$, por exemplo, não haveria a^x (Não teríamos uma função em IR);

Observe:

a) $(-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9} \notin$ IR

- Para a = 1 e x qualquer número real, a^x = 1 (Função constante);

Observe:

a) $1^5 = 1$

Vejamos alguns exemplos de funções exponenciais:

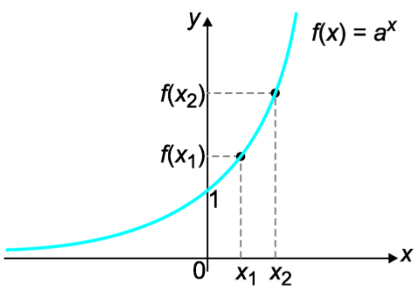
A) f(x) = 3^x , com a = 3

B) g(x) = $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ com a = $\dfrac{1}{2}$

GRÁFICOS DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

I) FUNÇÃO CRESCENTE

- A base é um número maior que 1 (a > 1)
- O gráfico não toca o eixo x (logo, não tem raízes)
- O gráfico corta o eixo y no ponto (0; 1)



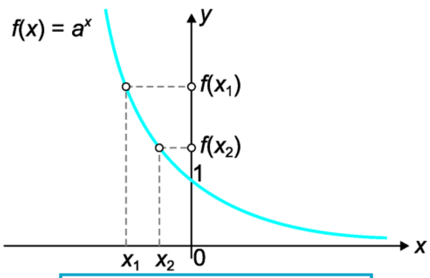
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$D = R$

$\mathrm{Im} = R_+^*$

II) FUNÇÃO DECRESCENTE

- A base é um número entre zero e um (0 < a < 1)
- O gráfico não toca o eixo x (logo não tem raízes)
- O gráfico corta o eixo y no ponto (0; 1)



$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$D = R$

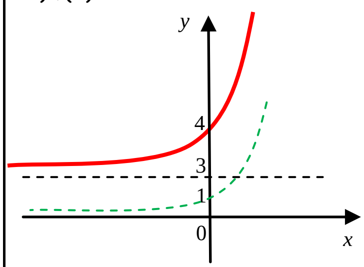
$\mathrm{Im} = R_+^*$

OUTROS GRÁFICOS DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Observe que nos gráficos abaixo as funções sofrem TRANSLAÇÃO, isto é, sofrem um "salto" para cima ou para baixo.

Você notará também a linha horizontal pontilhada, ela é denominada ASSÍNTOTA HORIZONTAL, ela limita a ação horizontal da função, Significa que a função não a intercepta

A) f(x) = 2^X + 3



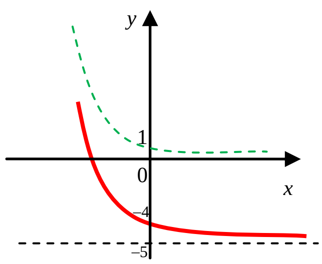
CARACTERÍSTICAS NOTÁVEIS

01. A função é crescente (base maior que 1)

02. Tem assíntota horizontal em 3, isto é no ponto (0;3). Note que é a constante na função.

03. Somando 1(um) à constante, verificamos que ela corta o eixo y em 4; quero dizer, no ponto (0;4).

B) f(x) = $(1/3)^X$ – 5



CARACTERÍSTICAS NOTÁVEIS

01. A função é decrescente (base menor que 1)

02. Tem assíntota horizontal em –5, isto é no ponto (0;–5). Note que é a constante na função.

03. Somando 1(um) à constante, verificamos que ela corta o eixo y em –4; quero dizer, no ponto (0;–4).

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

A.01. Dada a função exponencial f(x) = 4^x, determine:

a) f(3) b) f(-1) c) f(1/2) d) f(-1/2) e) f(0,5)

CONTATOS: jeversonprof@yahoo.com.br

A.02. Esboçar os gráfico das funções exponenciais abaixo, representando suas respectivas assíntotas horizontais, defina a imagem de cada uma delas e classifique-as em crescente ou decrescente justificando.

A) $f(x) = 2^x - 1$ Resp.: $Im(f) = \{y \in R \mid y > -1\}$

B) $f(x) = (1/3)^x + 1$ Resp.: $Im(f) = \{y \in R \mid y > 1\}$

C) $f(x) = 2^x + 7$

D) $f(x) = 2^{x+1}$ (muita atenção, esta não possui translação)

E) $f(x) = 3^{-x} + 2$

A.03. (Jevest) O gráfico de $f(x)=ax^2$ intercepta a curva $y=2^x$ no ponto P de abscissa 1. O gráfico de f passa pelo ponto:
a) (2,1) b) (2,4) c) (2,8) d) (2,9) e) (2,16)

EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Considere a equação $2^x = 16$. Nela a variável aparece como expoente. Uma equação em que isso ocorre é denominada equação exponencial. Para compreender bem esse assunto, vamos recordar algumas propriedades de potenciação.

Sendo $a \in R$ e $a \neq 0$ e $m \in Z$. Tem-se que:
$a^m = a.\ a.\ a.\ a.\ a.....\ a.$
← m fatores →

1) $a^0 = 1$ para $a \neq 0$ 2) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 3) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

4) $a^m.a^n = a^{m+n}$ 5) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 6) $(a^m)^n = a^{m.n}$

7) $(a.b)^n = a^n.b^n$ 8) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

DEFININDO UMA EQUAÇÃO EXPONENCIAL

1° TIPO DE EQUAÇÃO EXPONENCIAL

É toda equação na qual a incógnita aparece no expoente; é da forma $a^x = b$, com $0 < a \neq 1$.

Exemplos: a) $2^x = 16$
b) $3^{x-1} = 27$

Para resolver tais equações é necessário transformar a equação dada em:

- Igualdade de potência de mesma base.
  $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

- Potências de expoentes iguais. $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow a = b$ sendo a e $b \neq 1$ e a e $b \in R^*_+$.

Exercícios Resolvidos

R1) Resolver a equação $2^x = 128$

Resolução: Transformando a equação dada em igualdade de mesma base temos:
$2^x = 2^8$ → Logo temos que $x = 8$

R2) Resolver a equação $2^x = 1/16$.

Resolução: Sabemos que 1/16 é o mesmo que 2^{-4}.
Então: $2^x = 2^{-4}$ → Portanto $x = -4$

2° TIPO DE EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Algumas equações exponenciais não são possíveis transformar em igualdade de bases iguais de imediato. Nestes casos é necessário fazermos substituição de variável.
Veja os exercícios resolvidos abaixo:

R1) Resolver a equação $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$

Resolução: Podemos escrever a equação da seguinte forma:
$3^x.3^{-1} + 3^x.3^1 = 90$ fazendo $3^x = y$, temos:
$y.(1/3) + y.3 = 90$ → $y + 9y = 270$ →
$10y = 270$ → $y = 27$ →
Mas, retornando à variável inicial: $3^x = y$; então:
$3^x = 27$ ∴ $x = 3$

R2) Resolver a equação $3^{2x} - 4.3^x + 3 = 0$

Resolução: Podemos escrever a equação da seguinte forma.

$(3^x)^2 - 4.3^x + 3 = 0$ fazendo $3^x = y$
Temos: $y^2 - 4y + 3 = 0$
resolvendo a equação de 2° grau acima teremos as raízes:
$y' = 3$ ou $y'' = 1$

Porém é preciso retornar à variável inicial: $3^x = y$,
então: $3^x = 3$ ou $3^x = 1$ ∴ $x = 1$ ou $x = 0$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

A.04. Resolver as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{x+1} = 1024$

b) $3^{2x+2} = 81$

c) $5^{x+5} = 1$

d) $2^x = 0{,}25$

A.03. Determine o conjunto solução de cada equação abaixo:

a) $2^{x+1} + 2^{x-1} = 40$
b) $10^{2x} - 11.10^x + 10 = 0$
c) $5^{x-1} + 5^{x-2} = 6$
d) $2^{2x} - 6.2^x + 8 = 0$

A.04. (UFSC) Qual o valor de x, que satisfaz a equação
$2^{2x+1} - 3.2^{x+2} = 32$

A.05. Dê o conjunto verdade da equação $3.9^x - 26.3^x - 9 = 0$.

A.06. Qual é a soma dos valores de x que satisfaz a equação

$$\frac{16^x + 64}{5} = 4^{x+1}\ ?$$

PROBLEMAS

P.01. Sob certas condições, o número de bactérias de *B* de uma cultura, em função do tempo *t*, medido em horas, é dado por:

$$B(t) = 2^{\frac{t}{12}}$$

Em 5 dias após a hora zero, qual será o número de bactérias ?

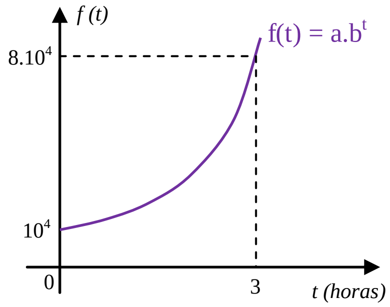
P.02. (JEVEST) Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas. Assim, o número n de bactérias após t horas é dado pela função $n(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$.

Nessas condições, pode-se afirmar que a população será de 51.200 bactérias depois de:

a) 1 dia e 3 h
b) 1 dia e 9 h
c) 1 dia e 14 h
d) 1 dia e 19 h
e) 1 dia e 20h

P.03. (MACKENZIE) O gráfico mostra, em função do tempo, a evolução do número de bactérias em certa cultura. Dentre as alternativas abaixo, decorridos 30 minutos do início das observações, o valor mais próximo desse número é:

a) 18.000
b) 20.000
c) 32.000
d) 14.000
e) 40.000



P.04.(UNIRIO) Numa população de bactérias, há $P(t) = 10^9 \cdot 4^{3t}$ bactérias no instante t medido em horas (ou fração da hora).

Sabendo-se que inicialmente existem 109 bactérias, quantos minutos são necessários para que se tenha o dobro da população inicial?

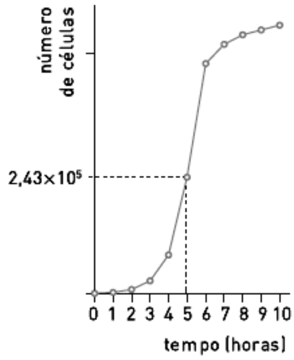
a) 20
b) 12
c) 30
d) 15
e) 10

P.05.(Ueg) A bula de certo medicamento informa que, a cada seis horas após sua ingestão, metade dele é absorvida pelo organismo. Se uma pessoa tomar 200 mg desse medicamento, quanto ainda restará a ser absorvido pelo organismo imediatamente após 18 h de sua ingestão? E após t horas?

Resp.: Após 18 horas restará 25 mg no organismo.
A função seguinte explicita a quantidade f(t), em mg, do medicamento presente no organismo após t horas da ingestão.

(UERJ) Utilize informações a seguir para responder aos problemas P.06 e P.07

Para analisar o crescimento de uma bactéria, foram inoculadas 1×10^3 células a um determinado volume de meio de cultura apropriado. Em seguida, durante 10 horas, em intervalos de 1 hora, era medido o número total de bactérias nessa cultura. Os resultados da pesquisa estão mostrados no gráfico abaixo.



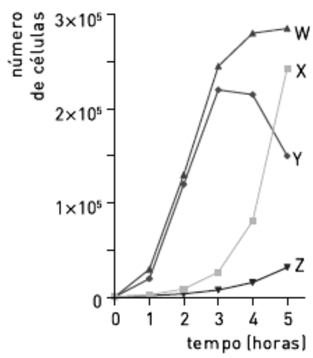
Nesse gráfico, o tempo 0 corresponde ao momento do inóculo bacteriano. Observe que a quantidade de bactérias presentes no meio, medida a cada hora, segue uma progressão geométrica até 5 horas, inclusive.

P.06. O número de bactérias encontrado no meio de cultura 3 horas após o inóculo, expresso em milhares, é igual a:

a) 16
b) 27
c) 64
d) 105

P.07. Após 10 horas de crescimento, 1×10^3 bactérias vivas foram imediatamente transferidas para um novo meio de cultura, de composição e volume idênticos aos do experimento inicial.

No gráfico abaixo, uma das curvas representa o crescimento bacteriano nesse novo meio durante um período de 5 horas.



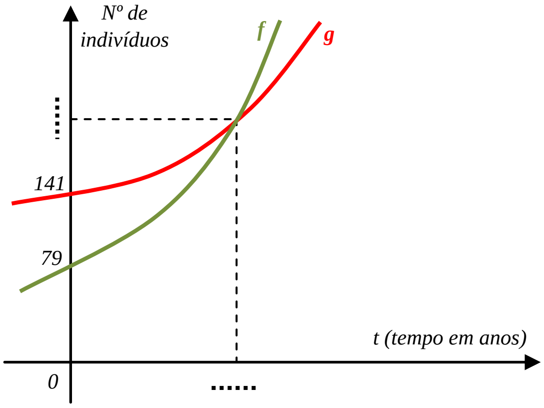
A curva compatível com o resultado do novo experimento é a identificada por:

a) W
b) X
c) Y
d) Z

P.08. As pesquisas de um antropólogo revelaram que as populações indígenas de duas reservas A e B variam de acordo com as funções

$$f(t) = 2^{t+2} + 75 \text{ e } g(t) = 2^{t+1} + 139,$$

em que t é o tempo, em anos, e as expressões f(t) e g(t) representam o número de indivíduos dessas reservas, respectivamente.

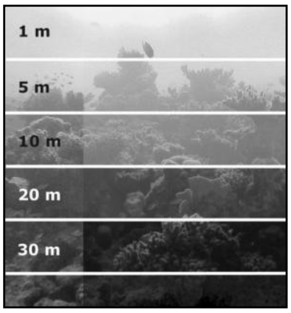


A) Considerando o instante atual como instante zero, os gráficos de f(t) e g(t) são formados por pontos das curvas indicadas acima por f e g, respectivamente.
Determine as coordenadas do ponto comum a f e g.

B) A reserva B será menor que a reserva A durante quanto tempo?

C) Daqui a 7 anos, a reserva B terá quantos indivíduos?

P.09. (UNB) Os lagos e os mares absorvem gradualmente a luz solar incidente em suas superfícies. Em geral a luz é absorvida quase que totalmente até a profundidade de 10 m, o que impede a existência abaixo dessa profundidade, de vida vegetal que depende de luz. No Sistema Internacional de Unidades, a unidade que mede a intensidade luminosa é a candela (cd). Segundo a lei de Bouguer-Lambert, a intensidade da luz I(x), a uma profundidade de x metros, é dada



por $I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$, em que I_0 é a intensidade com que a luz incide verticalmente sobre a superfície e $\mu > 0$ é o coeficiente de absorção do meio.

Com base nessa lei, julgue (<u>justificando através de cálculos</u>) os itens seguintes:

A) Se um raio luminoso incidir perpendicularmente na superfície do mar com intensidade inicial $I_0 > 0$, então a sua intensidade I(x) será positiva para qualquer profundidade x.

B) Supondo que a intensidade mínima de luz que pode ser detectada pelo olho de um mergulhador é de 0,01 cd e que, para um lago, $\mu = 1$, então, a uma profundidade de 3m, a luz proveniente de um raio luminoso que incide verticalmente sobre a superfície desse lago, com uma intensidade de 10 cd, não será percebida por esse mergulhador.

P.10. (OSEC-SP) Sob certas condições, o número de bactérias **B** de uma cultura, em função do tempo **t**, medido em horas, é dado por

$$B(t) = 2^{\frac{t}{12}},$$

Isso significa que 5 dias após a hora zero o número de bactérias é:

a) 1024 b) 512 c) 1120 d) 20 e) $\sqrt[3]{2}$

P.11. Suponha que após a conscientização dos agricultores de uma região do oeste do Pará, tenha sido feito um projeto de desintoxi - cação da lavoura. E segundo o programa, em uma área de 30 ha (hectares) a função que representa a área **intoxicada** em função do tempo, em mês, é $A(t) = 30 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{2}}$. Com relação a função é correto afirmar que:

a) Com o passar do tempo a área intoxicada aumenta.
b) Em 2 meses de programa a área intoxicada será 15 ha.
c) Após 8 meses, a área intoxicada será 8 vezes maior que área inicial.
d) Com o passar do tempo a área intoxicada diminui.
e) Com o passar do tempo a área intoxicada permanecerá constante.

P.12. (JEVEST) Protocolo de Kyoto. **O que é, objetivos, ações, diminuição do aquecimento global, gases poluentes.**

O Protocolo de Kyoto é um instrumento internacional, ratificado em 15 de março de 1998, que visa reduzir as emissões de gases poluentes. Estes, são responsáveis pelo efeito estufa e o aquecimento global. O Protocolo de Kyoto entrou oficialmente em vigor no dia 16 de fevereiro de 2005, após ter sido discutido e negociado em 1997, na cidade de Kyoto (Japão).
A poluição ambiental provocada pela queima de combustíveis fósseis libera grande quantidade de gás carbônico CO_2. A emissão de CO_2, no mundo, no ano de 1940, foi de 3,3 bilhões de toneladas e, em 1980, de 10 bilhões de toneladas. Admitindo que a emissão de CO_2, no ano t, em bilhões de toneladas, obedece a fórmula: $\boldsymbol{y = a \cdot e^{bt}}$, então a emissão de CO_2 em 2020 será, em bilhões de toneladas, de aproximadamente:

a) 16
b) 20
c) 30
d) 40
e) 50

Aproveitando os dois últimos problemas, reflita a seguinte frase:

"O importante não é o mundo que deixaremos para nossos filhos, e sim os filhos que deixaremos para o mundo!"

DÊ UMA PROVA DE AMOR, TENHA ATITUDES AMBIENTAIS!
(Prof. Jejeca)